**IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS**

Antes de abordar el tema de identidades, debemos recordar sobre el concepto de igualdad.

UNA IGUALDAD ES UNA EQUIVALENCIA EXACTA ENTRE DOS EXPRESIONES, LAS CUALES PUEDEN SER NUMERICAS O ALGEBRAICAS.

Una igualdad, posee dos MIENBROS:

PRIMER MIEMBRO SEGUNDO MIEMBRO

La igualdad anterior, es una igualdad numérica, puesto que todos sus elementos son números. Una igualdad es algebraica cuando involucran expresiones algebraicas como polinomios, funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.

De las igualdades algebraicas, podemos destacar dos tipos: las ecuaciones y las identidades.

Las ecuaciones con igualdades algebraicas, que VERIFICAN SU IGUALDAD PARA ALGUNOS VALORES NUMERICOS QUE ADOPTE LA VARIABLE DE LA VARIABLE.

Por ejemplo para esta ecuación solo existe un valor para “x”, al cual la operación da como resultado 9, y es 4

En cambio, si colocamos cualquier otro valor, la igualdad no se mantiene. Por ejemplo, colocaremos el valor 2 a “x”

En cambio, las identidades son igualdades algebraicas que SE VERIFICAN PARA TODO VALOR NUMERICO QUE ADOPTE LA VARIABLE. Por ejemplo

En esta identidad colocaremos el valor 6 a “x”.

Se verifico la igualdad para el valor 6 en “x”. Ahora colocaremos el valor 7

Se volvió a verificar, pero en este caso para el valor 7.

Las ecuaciones e identidades tienen diferentes formas de resolución. En las ecuaciones, se despeja la variable incognita, utilizando las reglas de pasaje de términos y cuidando la regla de los signos.

En cambio las identidades, no se resuelven, SE COMPRUEBAN LA IGUALDAD. Mediante procesos algebraicos, como los casos de factoreos, suma de expresiones algebraicas fraccionarias y artilugios matemáticos. En los cuales, NO ESTA PERMITIDO ES PASAJE DE TERMINOS NI FACTORES A OTRO MIEMBRO.

**Demostraciones de identidades trigonométricas**

En primer lugar, debemos conocer algunas identidades trigonometricas básicas:

Se definen las siguientes razones trigonométricas:

LAS DOS PRIMERAS IDENTIDADES SOLO SON ILUSTRATIVAS PARA DEMOSTRAR DE CUALES SON INVERSAS.

LAS TRES IDENTIDADES PRINCIPALES SON EL SENO, COSENO Y TANGENTE. LAS OTRAS SON “INVERSAS” DE LAS PRINCIPALES.

LAS FLECHAS AZULES INDICAN CUALES SON LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS ENTRE SI

SENO (1)

COSENO (2)

TANGENTE (3)

COTANGENTE (4)

SECANTE (5)

COSECANTE (6)

**LA IDENTIDAD TRIGONOMETRICA FUNDAMENTAL:**

**(7)**

De esta identidad pueden deducirse dos más:

**(8)**

**(9)**

Todas las anteriores identidades detalladas, nos permitirán la comprobación de identidades mas complejas.

***NO EXISTE UNA FORMULA O METODO UNIVOCO DE COMO SE COMPRUEBA UNA IDENTIDAD, (PUESTO QUE DEPENDIENDO DE LAS HERRAMIENTAS MATEMATICAS CON LAS QUE CUENTE EL ALUMNO SERA MAS SENCILLA O DIFICIL RESOLVER UNA IDENTIDAD). PERO HAY UNA CONVENCION DE QUE PARA COMPROBARLAS HAY QUE REDUCIR TODAS LAS EXPRESIONES A SENO Y COSENO.***

POR EJ.

Primero reemplazamos la secante y la cotangente por las expresiones (5) y (4), respectivamente:

Como secante y cotangente se encuentran elevados al cuadrado, entonces sus equivalentes también. Por eso, es que figuran coseno y seno al cuadrado. A continuación, se continúa simplificando los factores iguales. Y podemos observar que todo se reduce a 1.

Resolvemos las multiplicaciones y divisiones y llegamos a la verificación de la igualdad y finalizaría el ejercicio.

Ahora resolveremos otro ejemplo: para ir alcanzando mayor facilidad al resolver, es necesario saber DE MEMORIA LAS IDENTIDADES BASICAS ANTES PRESENTADAS Y SUS DERIVADOS, de manera tal que al observar una identidad ya podas elaborar estrategias para resolver:

En este caso, la parte amarilla puede ser reemplazada por la identidad (8). Esto quiere decir que una identidad no se comprende solo de “derecha a izquierda”, sino también al revés (por la propiedad “espejo” de las igualdades). La tangente y cotangente se pueden reemplazar por las expresiones (3) y (4).

Ahora continuaremos resolviendo lo que esta resaltado con amarillo en cálculos auxiliares.

Expresaremos al “1” con su denominador

al realizar esta suma de expresiones algebraicas fraccionarias, hay que realizar el mismo algoritmo que utilizábamos para sumar fracciones comunes. (buscar el común denominador, dividir por cada denominador, multiplicar por su respectivo numerador y sumar).

La expresión en turquesa podemos reemplazarla por la expresión (7)

El resultado final quedaría:

Ahora lo reemplazamos en la identidad original

Simplificamos, los cuadrados se reducen a exponente 1

De los senos y coseno quedando:

En algunas ocaciones se puede aplicar casos de factoreo para hacer mas sencilla la comprobación de la igualdad.

En el primer miembro, podemos aplicar el 5to caso de factoreo (la diferencia de cuadrados)

En cálculos auxiliares.

En estos dos factores, el primero ya es igual al segundo miembro de la igualdad, por lo tanto solo trabajaremos con la parte turquesa, reemplazando por las expresiones (4) y (6)

En los cálculos auxiliares, lo que esta resaltado con verde, puede reemplazarse por la expresión (8), y luego se simplifica, luego esa expresión se reemplaza en la identidad que estamos comprobando.

Multiplicando por 1 a la suma de cosecante y cotangente. Queda demostrada la identidad.

Otro ejemplo, ahora utilizando la herramienta de la potencia de binomios.

La formula del cuadrado de un binomio es:

Ahora lo aplicamos en las potencias que aparecen en la identidad

¡Hay que tener cuidado cuando es una resta!

Ahora lo reemplazamos en la identidad que estamos comprobando

Suprimimos los paréntesis

Como podemos ver, se pueden cancelar los términos de 2 seno y coseno, puesto que uno es positivo y el otro negativo. Quedara de la siguiente manera

Aquí podemos reemplazar por la expresión (7), dos veces:

Y de esta manera queda demostrado.

Ejercitación.